Espace Euclidien = Espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.

Université Mohammed 1[er], Oujda
ENSAH D'AL-Hoceima
A.P., Deuxième année
Année universitaire 2017/2018

→ une forme bilinéaire positive sur E si $q(x) = \varphi(x,x) \geq 0$

Épreuve[1] **du Module AP31 : "Algèbre Quadratique".**
Examen de la session de Rattrapage, Durée : 2h.

N.B. : Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la rédaction, la justification de réponses et la clarté de l'écriture.

Exercice 1 *(12 points)*

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $E = \mathcal{C}^\infty([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$. Soit Φ l'application sur $E \times E$ qui associe, à toute fonction (f,g), le nombre
$$\Phi(f,g) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} f(x)g(x)dx.$$
   (a) Montrer que Φ est une forme bilinéaire définie positive sur E.
   (b) Montrer que le couple (E,Φ) est un espace euclidien. En déduire une norme relative au produit scalaire euclidien Φ.
   (c) Montrer que $\left|\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{1+x^2}dx\right| \leq \left(\int_{-1}^{1} \frac{f^2(x)}{1+x^2}dx\right)^{1/2} \left(\int_{-1}^{1} \frac{g^2(x)}{1+x^2}dx\right)^{1/2}$.
   (d) Montrer que $\Phi(1,1) = \frac{\pi}{2}$.

2. Soit α et γ deux réels fixés, et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une base $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$. Pour tout $(X, X') = ((x,y,z)^T, (x',y',z')^T)$ dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, on définit $\mathcal{F}$ par
$$\mathcal{F}(X,X') = -2yx' + \alpha xy' - 2zy' + \gamma yz' + 3xz' - 3zx'.$$
   antisy $\alpha = \gamma = 2$
   (a) Déterminer les valeurs de α et γ pour que $\mathcal{F}$ soit une application bilinéaire alternée.
   (b) Déterminer une matrice M telle que $\mathcal{F}(X,X') = (\mathrm{M}X, X') = X'^T \mathrm{M}X$. ?
   (c) Soit L un application sur E telle que $\mathrm{L}(x,y,z) = \mathrm{M}X$. Montrer que L est linéaire antisymétrique, puis déterminer un vecteur $\vec{\mathcal{R}}$ tel que $\mathrm{L}(x,y,z) = \vec{\mathcal{R}} \wedge X$.

3. Soit α et β un réel fixé et $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère f l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ définie pour tout $((x,y,z),(x',y',z'))$ dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par
$$f((x,y,z),(x',y',z')) = 7xx' - 2yx' + \alpha xy' + 6yy' - 2zy' + \beta yz' - 5zz'.$$
   (a) Montrer que f est une forme bilinéaire.
   (b) Calculer $f(e_i, e_j)$ pour tout $1 \leq i,j \leq 3$, et en déduire la matrice A de f.
   (c) Calculer le déterminant $\det(A)$ de A, puis trouver une relation entre α et β pour que f soit dégénérée.

1. Estimation du temps : "Exercice 1 : 65 minutes". "Exercice 2 : 55 minutes".

le signe de l'intégrale :
f est positive sur $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ est positive
f est nég sur $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ est négative

Application bilinéaire alternée : antisymétrique (Forme)

$f : E_1 \times E_1 \to E_2$
$(x, y) \to f(x,y)$ $\Rightarrow f(x,y) = -f(y,x)$

(d) Déterminer les homomorphismes associés canoniquement à f, puis trouver les noyaux de ces deux homomorphismes. (*Discuter les cas dégénérée et non dégénérée*)

Exercice 2 *(8 points)*

Soit a un paramètre réel. On considère les trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sous la forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le système suivant

$$(S) : \begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n - w_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n + (1+a^2)w_n \\ w_{n+1} &= -u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice A telle qu'on peut écrire le système (S) sous la forme matricielle

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Montrer par récurrence que $X_n = A^n X_0$, $\forall n \geq 0$.

2. Déterminer le polynôme caractéristique de A puis calculer ses valeurs propres.
3. Déterminer les vecteurs propres et les sous-espaces propres de A.
   *Trouver les réels a pour que la matrice A soit diagonalisable, en déduire le polynôme minimal.
   *Dans ce cas, proposer une base de vecteurs propres de A puis diagonaliser A.
4. Dans la suite de cet exercice, on se limite au cas "$a = 0$"
   (a) Montrer que A n'est pas diagonalisable.
   (b) Déterminer P une matrice de passage telle que $J = P^{-1}AP$ soit une matrice de Jordan.
   *Donner les cas possibles de la matrice de Jordan J.
   (c) Calculer P^{-1}, puis calculer A^n pour tout $n \geq 1$.
   (d) En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Un produit scalaire est non dégénérée puisque défini positive

f est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}$: $\langle x, y \rangle = x^T M y = f(x,y)$

est continue sur $[a,b]$

$\int |f(x)|\, dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Inégalité de la moyenne

$(b-a) \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a) \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x)\, dx \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

Université Mohammed 1er, Oujda
ENSAH D'AL-Hoceima
A.P., Deuxième année
Année universitaire 2016/2017

Épreuve[1] du Module AP31 : "Algèbre Quadratique".

Session Normale, Durée : 2h.

Exercice 1 *(12 points)*

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $E = \mathcal{C}^\infty([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$. Soit f l'application sur E qui associe, à toute fonction φ, le nombre

$$f(\varphi) = \int_{-1}^{1} e^{-x}\varphi(x)dx.$$

   (a) Montrer que f est une forme linéaire sur E. ✓

   (b) Montrer que $|f(\varphi)| \leq \frac{e^2-1}{e} \sup_{x\in[-1,1]} |\varphi(x)|$. ??

   On note $\|\varphi\| = \sup_{x\in[-1,1]} |\varphi(x)|$ et $\|f\| = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \frac{|f(\varphi)|}{\|\varphi\|}$

   (c) Montrer que pour $\varphi \equiv 1$, alors $f(\varphi) = \frac{e^2-1}{e}$. En déduire la valeur de $\|f\|$? ✓

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une base $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$, soit $\beta^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ la base duale de E^* relative à la base β. On considère $u = 2e_1 + e_2 + e_3$, $v = e_1 + 2e_2 + e_3$ et $w = e_1 + e_2 + 2e_3$ trois vecteurs dans E.

   $u^* = \frac{3}{4}e_1^* - \frac{1}{4}e_2^* - \frac{1}{4}e_3^*$

   (a) Calculer le produit mixte $(u, v, w)_\beta$. Que peut-on déduire ?

   (b) Déterminer la base duale $\{u^*, v^*, w^*\}$ de E^* en fonction de e_1^*, e_2^* et e_3^*.

3. Soit a un réel fixé et $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère f l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ définie pour tout $((x,y,z),(x',y',z'))$ dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par

$$f((x,y,z),(x',y',z')) = 3xx' + 2xy' + 5xz' + 6yx' + 4yy' + ayz' - 27zx' - 18zy' - 45zz'.$$

   (a) Montrer que f est une forme bilinéaire.

   (b) Calculer $f(e_i, e_j)$ pour tout $1 \leq i, j \leq 3$, et en déduire la matrice A de f.

   (c) Déterminer le a tel que f soit dégénérée. $a \in \mathbb{R}$.

   (d) Déterminer les homomorphismes associés canoniquement à f, puis trouver les noyaux de ces deux homomorphismes. (*Discuter les cas dégénérée et non dégénérée*)

Exercice 2 *(8 points)*

On considère l'application q définie dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(X) = 15x^2 - 15y^2 + 6z^2 + 9xy + yz + 13zx + 3x + 7y + 2z,$$

où $X = (x, y, z)^T$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

1. Estimation du temps : "Exercice 1 : 65 minutes". "Exercice 2 : 55 minutes".

Université Mohammed 1er, Oujda
ENSAH D'AL-Hoceima
A.P., Deuxième année
Année universitaire 2017/2018

1. Déterminer une matrice symétrique A, un vecteur B et un nombre réel δ tels que $q(X) = X^T AX + B^T X + \delta$.
2. On pose $\varphi(X) = q(X) - B^T X - \delta$.
   (a) Exprimer $\varphi(X)$ en fonction de A et X, puis déterminer le spectre de A et les sous-espaces propres de A. Que peut-on déduire?
   (b) Déterminer une matrice orthogonale Q de vecteurs propres orthonormés telle que $A = Q^T DQ$ où D est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A.
   (c) Montrer que par un changement de variable $Y = QX$ on a
   $$\varphi(Q^T Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2,$$
   où λ_1, λ_2 et λ_3 sont les valeurs propres de A et $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$.
   (d) Citer le théorème de Sylvester, puis déterminer la signature de la forme quadratique φ. Que peut-on déduire?
3. Calculer QB et $(QB)^T$. En déduire l'expression de $q(Q^T Y)$ en fonction de y_1, y_2 et y_3.
4. Rappeler la forme polaire d'une forme bilinéaire f associée à la forme quadratique φ, puis déterminer l'expression de f.

C.P.9

Université Mohammed 1er, Oujda
ENSAH D'AL-Hoceima
A.P., Deuxième année
Année universitaire 2017/2018

Épreuve[1] du Module AP31 : "Algèbre Quadratique".
Examen de la session Normale, Durée : 2h

N.B. : Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la rédaction, la justification de réponses et la clarté de l'écriture.

Exercice 1 *(12 points)*

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $E = C^{\infty}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de classe C^{∞} sur $[0,1]$. Soit Φ l'application sur $E \times E$ qui associe, à toute fonction (f,g), le nombre

$$\Phi(f,g) = \int_0^1 e^{-x} f(x) g(x) dx$$

   (a) Montrer que Φ est une forme bilinéaire définie positive sur E.

   (b) Montrer que le couple (E,Φ) est un espace euclidien. En déduire une norme relative au produit scalaire euclidien Φ.

   (c) Montrer que $\left|\int_0^1 e^{-x} f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_0^1 e^{-x} f^2(x)dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 e^{-x} g^2(x)dx\right)^{1/2}$. $N^2(f,g) \leq N(f$ $\times N($

   (d) Montrer que $\Phi(1,1) = \frac{e-1}{e}$

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une base $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$.
Pour tout $(X, X') = ((x,y,z)^T, (x',y',z')^T)$ dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, on définit $\mathcal{F}$ par

$$\mathcal{F}(X,X') = -2yx' - 2xy' - 2zy' + \beta yz' - 3xz' - 3zx'.$$

   matrice

   (a) Déterminer la valeur de β pour que $\mathcal{F}$ soit une application bilinéaire alternée.

   (b) Déterminer une matrice M telle que $\mathcal{F}(X,X') = (MX, X') = X'^T MX$.

   (c) Soit L une application sur E telle que $L(x,y,z) = MX$. Montrer que L est linéaire antisymétrique, puis déterminer un vecteur $\vec{\mathcal{R}}$ tel que $L(x,y,z) = \vec{\mathcal{R}} \wedge X$

3. Soit β un réel fixé et $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère f l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ définie pour tout $((x,y,z),(x',y',z'))$ dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par

$$f((x,y,z),(x',y',z')) = 7xx' - 2yx' - 2xy' + 6yy' - 2zy' + \beta yz' - 5zz'.$$

   (a) Montrer que f est une forme bilinéaire.

   (b) Calculer $f(e_i, e_j)$ pour tout $1 \leq i,j \leq 3$, et en déduire la matrice A de f.

   (c) Déterminer le β tel que f soit dégénérée.

   (d) Déterminer les homomorphismes associés canoniquement à f, puis trouver les noyaux de ces deux homomorphismes. (*Discuter les cas dégénérée et non dégénérée*)

---

[1] Estimation du temps : "Exercice 1 : 65 minutes", "Exercice 2 : 55 minutes".

$N(f,g) = \sqrt{\int_0^1 e^{-x} f(x) g(x) dx}$

Exercice 2 *(9 points)*

On considère l'application q définie dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(X) = 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz + 3x + 7y + 2z + 15,$$

où $X = (x, y, z)^T$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une matrice symétrique A, un vecteur B et un nombre réel δ tels que $q(X) = X^T AX + B^T X + \delta$.
2. On pose $\varphi(X) = q(X) - B^T X - \delta$.
   (a) Exprimer $\varphi(X)$ en fonction de A et X, puis déterminer le spectre de A, le rayon spectrale de A et les sous-espaces propres de A. Que peut-on déduire?
   (b) Déterminer une matrice orthogonale Q de vecteurs propres orthonormés telle que $A = Q^T DQ$ où D est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A.
   (c) Montrer que par un changement de variable $Y = QX$ on a
   $$\varphi(Q^T Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2,$$
   où λ_1, λ_2 et λ_3 sont les valeurs propres de A et $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$.
   (d) Citer le théorème de Sylvester, puis déterminer la signature de la forme quadratique φ. Que peut-on déduire?
3. Calculer QB et $(QB)^T$. En déduire l'expression de $q(Q^T Y)$ en fonction de y_1, y_2 et y_3.
4. Rappeler la forme polaire d'une forme bilinéaire f associée à la forme quadratique φ, puis déterminer l'expression de $f(X, X')$ où $X = (x, y, z)^T$ et $X' = (x', y', z')^T$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Université Abdelmalek Essaadi,
ENSAH D'AL-Hoceima
A.P., Deuxième année
Année universitaire 2018/2019

Épreuve du Module AP31 : "Algèbre Quadratique".

Examen de la session Normale, Durée : 2h 15minutes.

N.B. : Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la rédaction, la justification de réponses et la clarté de l'écriture.

Exercice 1 *(13 points)*

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices de taille $n \times n$ à coefficient réels.
   Étant donné une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose
   $$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \text{et} \quad \mathrm{N}(A) = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)},$$
   où A^T est la transposée de A vérifiant $a_{ij}^T = a_{ji}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.
   (a) Calculer les coefficients générateurs c_{ij} du produit matriciel $A^T B$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis en déduire $\operatorname{tr}(A^T B)$ en fonction de a_{ij} et b_{ij}. $\operatorname{Tr}({}^{T}AB) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$
   (b) Montrer que l'application ϕ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par
   $$\phi(A, B) = \operatorname{tr}(A^T B), \quad \text{pour} \quad A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
   est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer que l'application N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que
   $$2 \leftarrow \mathrm{N}(AB) \leq \mathrm{N}(A)\mathrm{N}(B), \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$
   (d) Vérifier que $\mathrm{N}(I_n) = \sqrt{n}$, puis en déduire que $|\operatorname{tr}(A)| \leq \sqrt{n}\,\mathrm{N}(A), \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $\mathbb{R}^3$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.
   Pour tout $(X, X') = ((x, y, z)^T, (x', y', z')^T)$ dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, on définit $\mathcal{F}$ par
   $$\mathcal{F}(X, X') = 2yx' + \gamma yy' - 2xy' - 2zy' + \alpha xx' + \beta yz' + 3xz' - 3zx'.$$
   (a) Déterminer les valeurs de α, β et γ pour que $\mathcal{F}$ soit une application bilinéaire alternée.
   (b) Déterminer une matrice M telle que $\mathcal{F}(X, X') = (\mathrm{M}X, X') = X'^T \mathrm{M}X$.
   (c) Soit L un application sur $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{L}(x, y, z) = \mathrm{M}X$. Montrer que L est linéaire antisymétrique, puis déterminer un vecteur $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ tel que $\mathrm{L}(X) = \overrightarrow{\mathcal{R}} \wedge X$.
   (d) $\boxed{\text{Montrer que } \|\mathrm{L}\| = \|\overrightarrow{\mathcal{R}}\|\text{, puis calculer } \|\mathrm{L}\|.}$?
3. Soit α et β deux réels fixés et $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère f l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ définie pour tout $((x, y, z), (x', y', z'))$ dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par
   $$f((x, y, z), (x', y', z')) = 8xx' + 18zy' - 9yx' + 12xy' + \alpha yy' + 10xz' - 22yz' + 9zx' + \beta zz'.$$

$$N(I_n) = \sqrt{\Phi(I_n, I_n)} = \sqrt{\operatorname{Trace}(I_n^T I_n)} = \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que f est une forme bilinéaire.

(b) Calculer $f(e_i, e_j)$ pour tout $1 \leq i, j \leq 3$, et en déduire la matrice A de f.

(c) Trouver la relation entre α et β pour que f soit dégénérée.

(d) Déterminer les homomorphismes associés canoniquement à f, puis trouver les noyaux de ces deux homomorphismes. (*Discuter les cas dégénérée et non dégénérée*)

Exercice 2 *(7 points)*
On considère l'application q définie dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(X) = x^2 - 2y^2 + z^2 + 6xy - 2yz + x + y + z + 10^3,$$

où $X = (x, y, z)^T$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une matrice symétrique A, un vecteur B et un nombre réel δ tels que $q(X) = X^T AX + B^T X + \delta$.
2. On pose $\varphi(X) = q(X) - B^T X - \delta$.
   (a) Exprimer $\varphi(X)$ en fonction de A et X, puis déterminer le spectre de A, le rayon spectrale de A et les sous-espaces propres de A. Que peut-on déduire ?
   (b) Déterminer une matrice orthogonale Q de vecteurs propres orthonormés telle que $A = Q^T DQ$ où D est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A.
   (c) Montrer que par un changement de variable $Y = QX$ on a
   $$\varphi(Q^T Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2,$$
   où λ_1, λ_2 et λ_3 sont les valeurs propres de A et $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$.
   (d) Citer le théorème de Sylvester, puis déterminer la signature de la forme quadratique φ. Que peut-on déduire ?
3. Calculer QB et $(QB)^T$. En déduire l'expression de $q(Q^T Y)$ en fonction de y_1, y_2 et y_3.
4. Rappeler la forme polaire d'une forme bilinéaire f associée à la forme quadratique φ, puis déterminer l'expression de $f(X, X')$ où $X = (x, y, z)^T$ et $X' = (x', y', z')^T$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

la signature
et le signe
de la forme

CP2/Semestre S4

Université Mohammed Premier
ENSA d'Al-Hoceima.
A. BOUJRAF

Filières : AP2
Matière : Analyse numérique
Année Universitaire : 18/19.

Devoir surveillé : Durée (1h30)

Exercice 1. Soient la matrice A et le vecteur colonne b donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 18 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A admet une décomposition de Cholesky.
2. Déterminer la décomposition de Cholesky de A, puis résoudre le système linéaire $Ax = b$.

Exercice 2. On considère le système linéaire $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

1. Justifier pourquoi la matrice A admet une décomposition LU.
2. Donner la décomposition LU de la matrice A.
3. Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant la décomposition LU précédente.
4. En déduire l'inverse de la matrice A.

Exercice 3. On considère la fonction définie par $f(x) = cos(x) - xe^x$.

1. Monter que f possède un unique zéro α dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. a. Approcher α en utilisant la méthode de dichotomie avec deux itérations.
   b. Donner le nombre itérations nécessaire pour trouver une valeur approchée de α avec la précision 10^{-3} en utilisant la méthode de dichotomie.
3. a. Ecrire la méthode de Newton pour la recherche de la solution de $f(x) = 0$.
   b. Effectuer 5 itérations de la méthode de Newton (avec 4 décimales) à partir de $x_0 = 0$.
4. Numériquement, quelle est la méthode la plus rapide.
5. a. Vérifier que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente au problème du point fixe de la fonction g définie par $g(x) = \frac{\cos(x)}{e^x}$.
   b. Montrer que les hypothèses d'application de la méthode de point fixe ne sont pas vérifiées sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   c. Montrer qu'elles le sont sur l'intervalle $[0.4199, 0.6038]$.
   d. Combien de termes devrait-on calculer par la méthode du point fixe pour trouver une valeur approchée de α à 10^{-3} près ?

Ecole nationale des sciences appliquées

si A est une matrice carrée $\exp(-A) = (\exp(A))^{-1}$

Si $A = \lambda I + B$ $\quad \exp(A) = \exp(\lambda).\exp(B)$

Université Mohammed 1er, Oujda
ENSA D'AL-Hoceima (ENSAH)
A.P., Deuxième année
Année universitaire 2017/2018 -

Épreuve du Module AP31 : "Algèbre Quadratique".

Devoir surveillé, Durée : 2h.

N.B. : Il est interdit d'utiliser les calculatrices. La rédaction et la clarté de l'écriture seront tenues en compte.

Exercice 1 *(10 point.)*

I) On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x + y \\ \frac{dy}{dt} = (\alpha + \varepsilon) y, \end{cases}$$

avec les conditions initiales : $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$.

(a) Trouver la forme matricielle du système $(\mathcal{S})$ de matrice $A(\alpha, \varepsilon)$ à déterminer.

(b) Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres de $A(\alpha, \varepsilon)$. A quelle condition $A(\alpha, \varepsilon)$ possède telle une base de vecteurs propres ?

(c) Résoudre le système $(\mathcal{S})$. Calculer $B(\alpha, \varepsilon) = \exp(tA(\alpha, \varepsilon))$ selon les valeurs de ε.

(d) Pour une valeur de α fixée, comparez lorsque ε tend vers 0 : $\exp(tA(\alpha, \varepsilon))$ et $\exp(tA(\alpha, 0))$.

II) Soit ω un nombre réel non nul fixé, on considère le système d'équations différentielles suivant :

$$(\mathcal{E}) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\omega y \\ \frac{dy}{dt} = \omega x, \end{cases}$$

où $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs réelles.
*En utlisant les méthodes d'algèbre linéaire, résoudre le système $(\mathcal{E})$ avec les conditions initiales : $x(0) = \xi$ et $y(0) = \eta$.

Exercice 2 *(10 points)*

I) On propose de résoudre le système différentiel linéaire du premier ordre sans second membre :

$$(S) \begin{cases} x'(t) = 7x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 6y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = -2y(t) + 5z(t) \end{cases}$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ la dérivée de $X(t)$ par rapport à t.

(a) Déterminer la matrice A telle qu'on peut écrire le système différentiel (S) sous la forme :

$$X'(t) = AX(t).$$

$P_{min}(A) = 0$

(b) Vérifier que la matrice A est inversible, puis déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A.
*Déterminer le spectre de la matrice A et son rayon spectral $\rho(A)$. Que peut-on déduire ?

A^{-1}

(c) Déterminer les vecteurs propres et les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A.
*Préciser la dimension de chaque espace propre. Que peut-on déduire ?
*Donner une interprétation géométrique aux sous-espaces propres.

$AB = BA = I$

(d) Trouver le polynôme minimale de A et en déduire la matrice A^{-1} inverse de A.

(e) Si la matrice A est diagonalisable, alors déterminer une matrice P formée de vecteurs propres de A telles que $P^{-1}AP$ soit diagonale, **sinon** Jordaniser la matrice A.

(f) Déterminer la solution $X(t)$ du système (S), puis trouver la solution $t \longmapsto X(t)$ telle que $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ et $z_0 = -1$ soient données.

II) En utilisant la partie I), résoudre le système avec second membre suivant :

$$(\mathcal{E}) \begin{cases} x'(t) = 7x(t) - 2y(t) + e^{9t} \\ y'(t) = -2x(t) + 6y(t) - 2z(t) + 2e^{9t} \\ z'(t) = -2y(t) + 5z(t) - e^{9t} \end{cases}$$

(*Indication : trouver d'abord une solution particulière*).

$\det(\lambda - A) = 1 + 2$

$\frac{1}{2} - \frac{21}{2} = -\frac{3}{2}$

$-4 - 2$

Université Mohammed 1er, Oujda
ENSAH D'AL-Hoceima
A.P., Deuxième année
Année universitaire 2016/2017

Épreuve du Module AP31 : "Algèbre Quadratique".

Devoir surveillé 1, Durée : 2h.

N.B. : Il est interdit d'utiliser les calculatrices.

Exercice 1 *(8 points)*

On considère les trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sous la forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le système suivant

$$(S) : \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n - w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice A telle qu'on peut écrire le système (S) sous la forme matricielle

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Montrer par récurrence que $X_n = A^n X_0$, $\forall n \geq 0$.

2. Déterminer le polynôme caractéristique de A, puis calculer ses valeurs propres.
3. Déterminer les vecteurs propres et les sous-espaces propres de A. Que peut-on en déduire ? En déduire le polynôme minimal de A.
4. Déterminer une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice de Jordan J.
5. Calculer la matrice P^{-1}, puis calculer J^n et A^n pour tout $n \geq 1$.
6. En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 2 *(12 points)*

I) On propose de résoudre le système différentiel linéaire du premier ordre sans second membre :

$$(S) \begin{cases} x'(t) = 8x(t) - y(t) - 5z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) + z(t) \\ z'(t) = 4x(t) - y(t) - z(t) \end{cases}$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ la dérivée de $X(t)$ par rapport à t.

(a) Déterminer la matrice A telle qu'on peut écrire le système différentiel (S) sous la forme :

$$X'(t) = AX(t).$$

(b) Vérifier que la matrice A est inversible, puis trouver le polynôme caractéristique de la matrice A.
*Déterminer le spectre de la matrice A et son rayon spectral $\rho(A)$.

(c) Déterminer les vecteurs propres et les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A.
*Préciser la dimension de chaque espace propre. Que peut-on déduire ?
*Donner une interprétation géométrique aux sous-espaces propres.

(d) Trouver le polynôme minimale de A et en déduire la matrice A^{-1} inverse de A.

(e) Jordaniser la matrice A, c'est-à-dire trouver la matrice P formée des vecteurs propres telle que $P^{-1}AP = J$ soit une matrice de Jordan.
*Déterminer les blocs de Jordan de J ?

(f) Déterminer la solution $X(t)$ du système (S), puis trouver la solution $t \longmapsto X(t)$ telle que $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ et $z_0 = -1$ soient données.

II) En utilisant la partie I), résoudre le système avec second membre suivant :

$$(\mathcal{E}) \begin{cases} x'(t) = 8x(t) - y(t) - 5z(t) + e^{4t} \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) + z(t) + 2e^{4t} \\ z'(t) = 4x(t) - y(t) - z(t) - e^{4t} \end{cases}$$

(Indication : trouver d'abord une solution particulière).

ENSAH D'AL-Hoceima
A.P., Deuxième année
Année universitaire 2015/2016

Épreuve[1] du Module AP31 : "Algèbre Quadratique".

Examen, Durée : 2h.

Exercice 1 *(12 points)*

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $E = \mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômiale en x. Pour tout polynôme P, soit f_P l'application sur E qui associe, à tout polynôme Q, le nombre

$$f_P(Q) = \int_0^1 P(x)Q'(x)dx + \int_0^1 P'(x)Q(x)dx.$$

   (a) Montrer que f_P est une forme linéaire sur E.

   (b) Trouver les polynômes P de degré 3 tels que f_P soit orthogonale aux polynômes 1, $x+1$ et x^2+2.

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une base $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$, soit $\beta^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ la base duale de E^* relative à la base β.
   On considère $u = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $v = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $w = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ trois vecteurs dans E.

   (a) Calculer le produit mixte $(u, v, w)_\beta$. Que peut-on déduire ?

   (b) Déterminer la base duale $\{u^*, v^*, w^*\}$ de E^* en fonction de e_1^*, e_2^* et e_3^*.

3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

   (a) Montrer que ${}^t(u^n) = ({}^tu)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Quelle est la condition nécessaire pour que ${}^t(u^n) = ({}^tu)^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. (*Justifier*)

4. Soit f une application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ définie pour tout $((x,y,z),(x',y',z'))$ dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par $f((x,y,z),(x',y',z')) = 3xx' + 2xy' + 5xz' + 6yx' + 4yy' + 10yz' + czx' - 18zy' - 45zz'$ où c est un réel fixé.

   (a) Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.

   (b) Déterminer le c tel que f soit dégénérée.

   (c) Déterminer les homomorphismes associés canoniquement à f, puis trouver les noyaux de ces deux homomorphismes. (*Discuter les cas*)

5. On considère les points $A(1;2;3)$, $B(0;1;5)$ et $C(3;0;4)$ de $\mathbb{R}^3$ relativement à un repère orthonormé direct $(O; e_1, e_2, e_3)$.

   (a) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Que peut-on déduire ?

   (b) Montrer que le système $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Déterminer l'ensemble des points M tel que la droite (AM) soit perpendiculaire au plan (ABC). Calculer le produit vectoriel $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \wedge \overrightarrow{AM}$.

   (d) Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, puis déterminer l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

1. Estimation du temps : "Exercice 1 : 1 heure 15 minutes". "Exercice 2 : 45 minutes".

Exercice 2 *(8 points)*

On considère l'application q définie dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(X) = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) - 4x - 4y + 4z,$$

où $X = (x, y, z)^T$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une matrice symétrique A, un vecteur B et un nombre réel δ tels que $q(X) = X^TAX + B^TX + \delta$.

2. On pose $\varphi(X) = q(X) - B^TX - \delta$.

   (a) Exprimer $\varphi(X)$ en fonction de A et X, puis déterminer le spectre de A et les sous-espaces propres de A. Que peut-on déduire ?

   (b) Déterminer une matrice orthogonale Q de vecteurs propres orthonormés telle que $A = Q^TDQ$ où D est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A.

   (c) Montrer que par un changement de variable $Y = QX$ on a

$$\varphi(Q^TY) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2,$$

   où λ_1, λ_2 et λ_3 sont les valeurs propres de A et $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$.

   (d) Citer le théorème de Sylvester, puis déterminer la signature de la forme quadratique φ. Que peut-on déduire ?

3. Calculer QB et $(QB)^T$. En déduire l'expression de $q(X)$ en fonction de y_1, y_2 et y_3.

4. Rappeler la forme polaire d'une forme bilinéaire f associée à la forme quadratique φ_x puis déterminer l'expression de f.

C.P.2 S3

4,5